

МНОГОФАКТОРЕН МАКРО-ФИНАНСОВ МОДЕЛ ЗА СРОЧНА СТРУКТУРА НА ЛИХВЕНИТЕ ПРОЦЕНТИ

Кръстю Гумнеров
Институт по информационни технологии – БАН
gumnerov@iinf.bas.bg

Абстракт: Направен е обзор на състоянието на изследванията, посветени на многофакторните макро-финансови модели за сročна структура на лихвените проценти. Извлечена е и е описана поетапно общата рамка на реализацията им. Представен е алтернативен, оригинален подход за решаване на макро-финансовия модел във вид на VAR(1). Предложена е софтуерна реализация на Matlab. Набелязани са перспективите за развитието на подхода.

Благодарности:

Това изследване е извършено в рамките на програмата за гост-изследователи на БНБ, в периода от 5 април до 4 юли 2004 г. Изказвам своята благодарност към колективите на дирекции “Ковчезничество” и “Анализ и контрол на риска” на БНБ, и особено към колегите от отдел “Анализи” (с които тясно работех) за създадената приятна и творческа работна обстановка. С тяхната готовност за обсъждане и интерес и към най-тънките математически въпроси в построяването на модела, те провокираха появата на много ползотворни идеи, и за мен беше истинско удоволствие да се работи в техния колектив.

Изразявам специалната си благодарност към проф. д.ф.м.н. Рачо Денчев за научното му и практическо ръководство по време на работата ми по тази тематика. Това ми помогна детайлно да разбера и обоснова моделите на кривата на доходност, и всичките резултати от това изследване са благодарение на това ръководство. Неговите разяснения и коментари по време на семинарите на дирекция “Ковчезничество” бяха полезни за всички участници.

Искам да изразя специалната си благодарност към докторант Стоян Стоянов за извършените консултации по Матлаб и времето което отдели за да ми помогне в софтуерната реализацията на модела.

Също искам да изкажа благодарността си за консултациите в областта на числените методи за оптимизация на многомерни функции дадени ми от ст.н.с. д-р Пенчо Маринов, както и за полезните дискусии по въпроси, свързани с тематиката на изследването на проф. д. ф. м. н. Светлозар Рачев, проф. д. м. н. Елисавета Панчева, доц. д-р Младен Василев-Мисана, д-р Тао Ву, д-р Петер Хйордал, доц. д-р Пламен Матеев, ст.н.с. д-р Васил Василев, ст. ас. д-р Никгохос Канарян и др.

I. Увод

Взривообразното разрастване на пазара на дериватите (опции, фючърси и др.) насочи вниманието на специалистите към създаване на теория за оценка на финансовите активи и модели на финансовите пазари. Водещи банкови и финансови институции по целия свят привличат научни експерти, които могат да използват висши аналитични и изчислителни техники за оценяване на финансови деривати.

Имайки добър модел на кривата на доходност, може да се създадат по-точни модели за оценка на лихвени деривати. Краткосрочните точки от кривата на доходност имат съществено значение за лихвени деривати като caps, interest rate swaptions and options.

Успешното моделиране на кривите на доходност за САЩ и Еврозоната и формирането на бъдещи очаквания за стойностите в наблюдаваните им точки, би позволило *практическото формиране на инвестиционната стратегия и адекватно алокиране на капитала, на институциите имащи експозиции на тези пазари.*

От макроикономическа гледна точка, добрият модел на кривите на доходност би помогнал за монетарната политика на централната банка. А когато в такъв модел участват и наблюдаеми макро фактори, като инфлация, output gap (отклоненията на брутния вътрешен продукт), заетостта и др., то може да се изследва взаимозависимостта на конкретен макрофактор от изменението на наблюдаваните точки от кривата на доходност, и така да се начертава успешна политика на макроикономическо поведение.

II. Анализ на състоянието на изследванията по проблема

Условията които формират цените на финансовите пазари са необозримо много и функциите им на въздействие или са неизвестни или имат много сложен вид, затова е естествено променливите на финансовите пазари да се разглеждат като случайни величини. Това налага наблюдавания макроикономически или финансов временен ред да се интерпретира като реализация на някакъв случаен процес. При това неявно се предполага, че временния ред има структура, отличаваща го от последователността от независими случайни величини. Обикновено се предполага, че структурата на реда може да се опише с модел, съдържащ неголям брой параметри в сравнение с количеството наблюдения – така наречения принцип на “пестеливостта” (parsimony), това е много важно при използването на модела за прогнозиране. Примери за такива модели могат да служат авторегресионните модели - $AR(p)$, моделите пълзящо средно - $MA(q)$, и техните комбинации – $ARMA(p, q)$, $ARIMA(p, k, q)$, както и техните многомерни обобщения векторните авторегресии - $VAR(p)$ [Бокс и Дженкинс, 1976; Айвазян и Мхитарян, 1998; Hamilton 1994].

Годините 1969-1979 бяха “златната декада” за динамичната теория на оценяването на финансовите активи. Моделът на Black and Scholes [Black and Scholes 1973] е най-същественият пробив през този период. Сред най-значителните постижения са също работите на Merton [Merton 1973] по финансови модели с непрекъснато време, биномните модели на Cox, Ross and Rubinstein [Cox, Ross and Rubinstein 1979] за оценяване на опции, моделът на Cox, Ingersoll and Ross [Cox, Ingersoll and Ross 1985] за сročната структура на лихвените проценти и работите на

Harrison and Kreps [Harrison and Kreps 1979] за съществуване на еквивалентна мартингална мярка, завършващи концептуалната структура на тази теория.

За моделиране и прогнозиране на кривата на доходност традиционно се използват едно-факторни модели за срочна структура на лихвените проценти. Това са модели в които кривата на доходност се моделира като случен процес с помощта на моментната (краткосрочната) лихва, използвайки условията за неарбитражност на пазара. За случайния процес се извежда диференциално уравнение аналогично на уравнението на Black-Scholes за пазара на акциите. Разликата с уравнението на Black-Scholes е че пазара на облигации е непълен. Диференциалните уравнения на някои от моделите за срочна структура на лихвените проценти допускат решения в явен вид, което облекчава задачата за оценка (калибриране) на параметрите им по данните от временния ред (обръщане на кривата на доходност) [Bjork 1996]. Най-известните модели са разработени от Vasicek [Vasicek 1977]; Merton [Merton 1974]; Cox, Ingersoll and Ross [Cox, Ingersoll and Ross 1985]; Ho and Lee [Ho and Lee 1986]; Hull and White [Hull and White 1990]; Blak, Derman and Toy [Blak, Derman and Toy 1990].

През последните години във финансовата и макроикономическата литература се развиват и някои специфични модели, които моделират кривата на доходност като афинна функция от няколко фактора (включително и макроикономически), използвайки неарбитражността на моделите за срочна структура на лихвените проценти [Duffie, D. and R. Kan 1996], [Evans and Marshall 2001], [Duffie, G.R. 2002], [Diebold, and Li 2003], [Hördahl, Tristani, and Vestin 2003], [Rudebusch and Wu 2003], [Ang, A. and M. Piazzesi 2003]. Особено представителни за този подход са работите: [Hördahl, Tristani, and Vestin 2003], [Rudebusch and Wu 2003], [Ang, A. and M. Piazzesi 2003].

Основната идея на [Rudebusch and Wu 2003] е следната:
Авторите разглеждат точките от кривата на доходност за САЩ с месечни падежи – 1, 3, 12, 36 и 60 месеца. Данните са на месечна база, взети в края на всеки месец за периода Януари 1988 – Декември 2000.

Чрез анализ на главните компоненти, те отделят два латентни (ненаблюдаеми) фактора, които определят динамиката на петте гореописани временни реда.

Техният макро-финансов модел го построяват на два етапа:

I етап: Построяване на Yields-Only модела:

За този модел представят вектора на състоянието на системата от два компонента (съответстващи на латентните фактори). След което с векторна авторегресия от първи ред (с нормално разпределение на остатъците) представят динамиката на вектора на състоянието – това го наричат транзакционно уравнение. По-нататък представят:

-1. късата лихва като афинна функция от вектора на състоянието, т.е. от латентните фактори; и

-2. риск-премията (която е асоциирана със случайните остатъци на транзакционното уравнение) също като афинна функция от вектора на състоянието,

т.е. от латентните фактори, като заявяват, че има макроикономическа интерпретация на риск-премията като линейна функция на състоянието на икономиката. Чрез тези три експлицитни представяния авторите **постулират своя афинен гаусов не-арбитражен модел за срочна структура на кривата на доходност**. След което, използвайки риск-неутралното оценяване, и от афинността на модела представят логаритъма на цената на бондовете като афинна функция от късата лихва, или като афинна функция на вектора на състоянието. За да се представи това експлицитно за цена на бонд с произволен матуритет, е необходимо да се определят два параметра. Това определяне става рекурсивно, като се тръгва от коефициентите на представянето на късата лихва и по-нататък с помощта на съществуването на еквивалентна мартингална мярка (което следва от неарбитражността на пазара) се представя транзакционното уравнение относно еквивалентната мартингална мярка. От това представяне се извежда търсената рекурсивна връзка на параметрите.

За да оценят параметрите на така въведения афинен гаусов не-арбитражен модел, авторите използват метода на максимално правдоподобие. Експериментално показват че единият фактор се свързва с нивото на кривата на доходност и е релевантен на средната част на кривата – между двегодишните и петгодишните точки. А другият с наклона на кривата – релевантен на късата ѝ част.

II етап: Построяване на макро-финансовия модела:

Като основна задача авторите си поставят да моделират латентните фактори като функции на инфлацията, инфлационната цел, output gap, и така чрез тях да опишат по-добре динамиката на кривата на доходност.

За тази цел те използват вариант на правилото на Тейлър [Taylor, John B. 1993; Taylor, John B. 1999] Ключов елемент в правенето на тази връзка е идентификацията на “нивото” като директно съответствие на инфлационната цел. По този начин разделят правилото на Тейлър на две части (свързани съответно с “нивото” и “наклона”) и всяка част я описват като авторегресия от първи ред с гаусово разпределение на остатъците, към която е добавена среднопретеглена част идваща от спецификата на монетарната политика (така нареченият “smoothing factor”). Особено тази специфика е представена в моделирането на “наклона” където в зависимост от параметрите на уравнението могат да се превключват два режима на монетарно-политическо поведение. Така те допълват постулирания в първата част афинен гаусов не-арбитражен модел.

След което, за да завършат напълно смесения макро-финансов модел те предлагат експлицитно описание на поведението на инфлацията и output gap (едно чрез друго) **извеждайки ги от Нео-Кенсианската теория** за агрегатното търсене. Същественото в това описание е че то допуска, освен авторегресионни части от първи ред с нормално разпределение на остатъците, и части свързани с очакванията за бъдещото състояние на инфлацията и output gap (изразени като условно математическо очакване). По-нататък те модифицират тези спецификации като, авторегресионните части ги превръщат от втори ред, и ги свързват с “нивото”.

Накрая допълват вектора на състоянието с новите променливи и така транзакционното им уравнение става векторна авторегресия, но от по-висока размерност. Всичко това, разбира се, налага да се отчете и в другите уравнения на афинния гаусов не-арбитражен модел и съответно всички параметри да се оценят отново. Тези оценки, авторите ги правят, отново чрез метода на максимално правдоподобие. Така *калибрирания смесен модел е окончателен за моделиране на кривата на доходност*.

Подобна по дух е и работата [Hördahl, Tristani, and Vestin 2003]. Основната й идея е следната:

Авторите разглеждат следните точки от кривата на доходност за Германия – 1, 3, 6, 12, 36 и 84 месечни падежи. Данните са на месечна база, взети в края на всеки месец за периода Януари 1975 – Декември 1998.

За разлика от подхода на Rudebusch и Wu, тук авторите не редуцират размерността на динамиката на кривата на доходност до по-малък брой (от наблюдаваните точки) латентни фактора. Те директно представят вектора на състоянието с помоща на макроикономическите фактори – инфлация (CPI), потребление (CGG – output gap), инфлационна цел и късата лихва (short term rate).

За тази цел те предлагат експлицитно стохастично описание на поведението на:

- 1. *инфлацията и output gap* (едно чрез друго) **извеждайки ги от Нео-Кенсианската теория** за агрегатното търсене. Същественото в това описание е че то допуска, не само авторегресионни членове от първи ред с нормално разпределение на остатъците, но и членове свързани с **очакванията за бъдещото състояние на инфлацията и output gap** (изразени като условно математическо очакване). Този вид отношения са известни в литературата като *backward/forward looking models*. По-нататък, те модифицират тези спецификации като, средно-претеглят forward-looking членовете със авторегресионните членове, и ги превръщат и ги лагират с дванадесет лага назад. Обосновават се, че това се налага от спецификата на данните, които са на месечна база.

- 2. *късата лихва*, използвайки вариант на правилото на Тейлър [Taylor, John B. 1999] . Тук спецификацията (за разлика от модела на Rudebusch и Wu) е по-проста. Не се предполага, че могат да се превключват два режима на монетарно-политическо поведение. Освен това инфлационната цел (от правилото на Тейлър) се описва само като авторегресия от първи ред с нормално разпределение на остатъците (които са некорелирани с остатъците от правилото на Тейлър). Следвайки [Clarida, Galí, and Gertler, 1999], авторите предлагат forward-looking част на инфлацията, която отново е от с дванадесет лага, но напред.

По този начин те представят вектора на състоянието на системата от два компонента. Първата е 29-мерна (означена като “predetermined”), включваща дванайсетте авторегресионни члена на инфлацията и output gap, първият авторегресионен член на късата лихва, инфлационната цел и освен това *случайните остатъци* на инфлацията, output gap и късата лихва. Втората е 24-

мерна, включваща дванайсетте forward-looking члена на инфлацията и output gap (означена като “not predetermined”).

След което с векторна авторегресия от първи ред (с нормално разпределение на остатъците) представят динамиката на вектора на състоянието – аналогично на транзакционното уравнение при Rudebusch и Wu. По-нататък представят: късата лихва като афинна функция от вектора на състоянието; и риск-премията също като афинна функция от вектора на състоянието. **Но вектора на състоянието е от много висока размерност - 53.** Затова използвайки подхода от [Paul Söderlind 1999] (който имплементира разлагането на Schur), авторите редуцират размерността на вектора на състоянието, като свеждат всичко само до “predetermined” компонентата му. След което строят нов 29-мерен вектор състоящ се от: дванайсетте авторегресионни члена на инфлацията и output gap, инфлационната цел, късата лихва, настоящата инфлацията и настоящият output gap и първият авторегресионен член на късата лихва – както се вижда в него **липсват случайни компоненти**. Този вектор го изразяват от вектора на състоянието и отново чрез подхода на Paul Söderlind го изразяват от “predetermined” компонентата на вектора на състоянието.

След това постулират риск-премията като афинна функция от новия 29-мерен вектор на състоянието. Съответно късата лихва отново е изразяват като афинна функция от новия 29-мерен вектор на състоянието.

Сега от афинността на така въведения модел представят логаритъма на цената на бондовете като афинна функция от късата лихва, или като афинна функция на новия вектор на състоянието. За да се представи това експлицитно за цена на бонд с произволен матуритет, е необходимо да се определят два параметра. И както при Rudebusch и Wu, това определяне става рекурсивно, като се използва риск-неутралното оценяване авторите *представят доходността на точка с произволен месечен матуритет, от кривата на доходност, като линейна функция от новия 29-мерен вектор на състоянието.*

За да оценят параметрите на така въведения афинен гаусов не-арбитражен макро модел, авторите използват метода на максимално правдоподобие. Реализацията на метода, за техния модел, е сложна задача, поради високата размерност на пространството на състоянието и неколкотократно му преобразуване (макар и до по-ниска размерност). **Така калибрирания смесен модел е окончателен за моделиране на кривата на доходност.**

След това (за разлика от Rudebusch и Wu) те оценяват прогнозната сила на модела си, като го сравняват с общоприетите модели в литературата, а именно - random walk, canonical essentially affine Gaussian three-factor model (без макро-фактори) и Ang-Piazzesi Macro Model. Оценката е правят чрез RMSE (корен на средно квадратичната грешка), в in-sample и out-of-sample performance. Това което представят е, че общо взето random walk се държи най-добре при прогнозиране за къс период, докато техният модел най-добре прогнозира дългите периоди.

Споменатите предишни две работи са хронологично след работата на Ang и Piazzesi [Ang, A. and M. Piazzesi 2003], и се основават на нея. Там Ang и Piazzesi

разглеждат следните точки от кривата на доходност за САЩ – 1, 3, 12, 36 и 60 месечни падежи. Данните са на месечна база, взети в края на всеки месец за периода Януари 1952 – Декември 2000.

Макроикономическите показатели са взети месечно за периода Юни 1952 – Декември 2000, във две групи: 1-ва - CPI, PPI of finished goods, и spot market commodity prices (PCOM); 2-ра - index of Help Wanted Advertising in Newspapers (HELP), unemployment (UE), the growth rate of employment (EMPLOY) и the growth rate of industrial production (IP). Първата група е показателна за инфлацията, а втората за реалната икономическа активност. Макроикономическите данни са обработени като са взети логаритъма от частното на настоящата стойност и лагираната 12 месеца назад. След което данните са нормирани с математическо очакване 0, и дисперсия 1. Чрез анализ на главните компоненти, те отделят по един фактор, за всяка група, които определят динамиката на гореописаните временни реда. Постулират, че динамиката, само на системата от макрофактори, се задава с 2-мерна векторна авторегресия от дванадесети ред (**без да правят проверка за реда**), с нормално разпределение на остатъците. С това те **се различават от подходите на Rudebusch и Wu, и на Hördahl, Tristani, и Vestin, като не се интересуват от Нео-Кенсианската теория**, за да дадат експлицитно стохастично описание на поведението на макро факторите.

За динамиката на кривата на доходност, те допускат че се определя от три латентни (ненаблюдаеми) фактора, но за разлика от подхода на Rudebusch и Wu, тук авторите не използват анализ на главните компоненти, а извеждат тези фактори едва когато оценяват параметрите на моделите им в последната стъпка на реализация.

За да моделират поведението на *късата лихва*, използват:

1. вариант на правилото на Тейлър [Taylor, John B. 1993; Taylor, John B. 1999] което описва поведението й като регресия от първи ред от макро факторите, с нормално разпределение на остатъците (**които са ортогонални с макро факторите**). Тук спецификацията, за разлика от моделите на Rudebusch и Wu, и на Hördahl, Tristani, and Vestin, е значително по-проста;
2. от допускането за афинност на моделите, представят късата лихва като афинна функция от доходностите (или от техните латентни съответстващи им фактори).

След което обединяват двете представяния, и на практика за описанието на късата лихва получават регресия състояща се от две многомерни части, които са ортогонални и имат различни видове динамики. Съответно от допускането за динамиката на тези части се задават размерността и вида на вектора на състоянието. Така авторите разглеждат следните пет дъщерни модела получени от техния подход:

- 1. VAR Yields Only – това е 5-мерен VAR(12), само с петте наблюдавани доходности;
- 2. VAR with Macro – това е 7-мерен VAR(12), пространството на състоянието му се задава с двата макро фактора и всичките наблюдавани 5 доходности;

- 3. Yields-Only, означава 3-мерен VAR(1), само с трите латентни фактора съответстващи на 5-те наблюдавани доходности, без макро променливи;
- 4. Macro model – това е 27-мерен VAR(1), пространството на състоянието му се задава с двата 12-лагирани макро фактора и трите латентни фактора съответстващи на 5-те наблюдавани доходности. Но в уравнението за късата лихва присъстват само настоящите макро фактори (без техните лагирани);
- 5. Macro Lag model – това е 27-мерен VAR(1), като по-горния. Има в уравнението за късата лихва освен настоящите макро фактори и двата 12-лагирани макро фактора.

И както в предишните две работи, постулират риск-премията като афинна функция от вектора на състоянието. И по аналогичен начин на тях определянето на необходимите два параметъра става рекурсивно. Това позволява на авторите да **представят доходността на точка с произволен месечен матуритет от кривата на доходност като афинна функция от вектора на състоянието.**

За да оценят параметрите на така въведения афинен гаусов не-арбитражен макро модел, авторите използват двустъпкова процедура. Първо оценяват коефициентите в уравненията задаващи динамиката на макрофакторите, и съответно това са параметрите отговарящи на коефициентите асоциирани към макропроменливите в обединеното уравнение за късата лихва, по обикновения метода на най-малките квадрати. На втора стъпка фиксирайки тези коефициенти чрез метода на максимално правдоподобие оценяват всички останали параметри, включително и латентните фактори от кривата на доходност. За латентните фактори представят следното наблюдение – първият латентен фактор наречен *ниво* корелира 92% с $(y_t^1 + y_t^{12} + y_t^{60})/3$, вторият латентен фактор наречен *сред* корелира 58% с $y_t^{60} - y_t^1$, третият латентен фактор наречен *кривина* корелира 77% с $(y_t^1 - 2 y_t^{12} + y_t^{60})$, където y_t^i е точката с матуритет i . Реализацията на калибриращата процедура, е сложна задача, поради високата размерност на пространството на състоянието.

След това (за разлика от Rudebusch и Wu) те оценяват прогнозната сила на дъщерните си модели, като ги сравняват с общоприетия бенчмарк - random walk. Оценката е правят чрез RMSE и MAD (средна абсолютна грешка), в out-of-sample performance с прогноза за един месец напред. Това което представят е, че най-добре се държи Macro model-a, като за 3-месечната доходност random walk най-добре прогнозира. Тези резултати добре се съгласуват с принципа за “пестеливостта” (parsimony). Така тестовите показват, че **най-добър модел е този който отчита съвместната динамика на макрофакторите и точките от кривата на доходност, но без излишно да утежнява размерността на модела.**

Изследването на [Dai, Q., Singleton, K., 2000] е посветена на класификация на различните модели за сročна структура на лихвените проценти, в зависимост от броя на латентните фактори. Работата [Dai, Q., Singleton, K., 2002] е посветена на два критерии за адекватност на модела описващ данните, като тези критерии са свързани с хипотезата за очакванията. Първият относно (физическата или

генериращата данните) мярка, а вторият относно риск-неутралната (мартингалната) мярка.

III. Емпирична част

След направеният обзор на литературата, посветена на моделирането на срочната структурата на лихвените проценти, съвместно с колектива на отдел “анализи” на БНБ, решихме да се реализира многофакторен афинен макро-финансов модел на кривата на доходност на САЩ. Спряхме се на модела предложен в работата [Rudebusch and Wu 2003] като най-подходящ за нуждите на дирекция “Ковчезничество”. По-нататък в изложението следваме техният подход, като решаваме по оригинален начин макро-финансовия модел, използвайки техниката за смяна на променливите. Така представяме макро-финансовия модел (по алтернативен на техният начин) в удобна за калибрация форма във вид на VAR(1).

Най-общо етапите на изграждане на модела могат да се обособят в следния ред:

Предварителен. Уточняване и предоставяне на необходимите данни.

1. Определяне на латентните фактори.
2. Изграждане на макро-финансов модел.
3. Определяне на доходността за всяка точка от кривата на доходност.
4. Представяне на макро-финансовия модел като VAR(1).
5. Калибрация на модела.

Следват разяснения по етапите на изграждане на модела:

Предварителен етап. Уточняване и доставяне на необходимите данни.

Това е етап на уточняване на необходимите данни за реализация на модела и тяхното доставяне. Могат да се разделят на два типа данни – финансови, това са наблюденията на различни точки от кривата на доходност под формата на временни редове; и – макроикономически, наблюдения на различни макроикономически показатели също под формата на временни редове. От отдел “Анализи” ни бяха предоставени за американската крива на доходност временни редове в следните 6 точки - едномесечната, тримесечната, шестмесечната, 24 месечната, 60 месечната и 120 месечната. Следвайки подхода в [Rudebusch, G.D. and Wu, T. 2003] редуцирахме извадката до периода от януари 1988 до април 2004г. на месечна база. За немската крива на доходност ни бяха предоставени наблюденията на месечна база за 12 точки, но с различна дължина на извадката. Затова компромисно ограничихме извадката в периода от юни 1993 до април 2004г. в следните 9 точки - едномесечната, тримесечната, шестмесечната, 24 месечната, 36 месечната, 48 месечната, 60 месечната, 84 месечната и 120 месечната.

1. Определяне на латентните фактори.

След като разполагаме с временните редове от точките на кривата на доходност, подлагаме тези данни на анализ на главните компоненти и така извличаме

латентните фактори които обясняват динамиката на наблюдаваните точки. Така определените временни редове на латентните фактори определят вектора на състоянието на системата за (само)финансовия модел и размерността на вектора е равен на броя на латентните фактори за (само)финансовия модел.

За тази цел проучихме алгоритмите за анализ на главните компоненти в софтуерните платформи Statistica 7.0 и MatLab 6.5. След консултации с доц. д-р Ценко Ценков и докторант Стоян Стоянов се спряхме на Матлаб.

За **американската крива на доходност** (разполагайки с временни редове в 6-те точки) определихме че първият латентен фактор обхваща 95,14 %, а вторият 4,41 % от дисперсията на наблюдаваната система, това означава че тези 2 латентни фактора са достатъчни за моделиране на динамиката на американската крива. За сравнение при Rudebusch и Wu първият латентен фактор обхваща 93,1 %, а вторият 6,2 % от дисперсията на наблюдаваната система. Там авторите показват че първият латентен фактор се свързва с “нивото” на кривата на доходност и е релевантен на средната част на кривата – между двегодишните и петгодишните точки. А другия - с “наклона” на кривата – релевантен на късата ѝ част.

За **немската крива на доходност** (разполагайки с временни редове в 9-те точки) определихме че първият латентен фактор обхваща 87,5644 %, а вторият 9,2914 % от дисперсията на наблюдаваната система, това означава че тези 2 латентни фактора са достатъчни за моделиране на динамиката на немската крива.

2. Изграждане на макро-финансов модел.

Състои се от 2 подетапа:

2.1. Изграждане на (само)финансов афинен гаусов не-арбитражен модел.

Вектора на състоянието се представя от първите главни компоненти, които описват в достатъчна степен динамиката на системата от наблюдавани точки от кривата на доходност. Тази динамика се задава с векторна авторегресия от първи ред (с нормално разпределение на остатъците. VAR(1) с гаусово разпределение на остатъците е изцяло възприета конвенция относно динамиката на афинните модели за срочна структура на лихвените проценти. Това има своите основания във факта, че непрекъснатите аналози на афинните модели за срочна структура на лихвените проценти се описват със система от стохастични диференциални уравнения, които са процеси на Ито. [Dai, Q., Singleton, K., 2000], [Duffie, D. and R. Kan 1996], [Duffie, G.R. 2002]. Дискретният аналог, на такива системи от процеси на Ито, са VAR(1) с гаусово разпределение на остатъците. В този дух и ние се придържаме към тази рамка.

За (само) финансовия модел имаме следното представяне:

$$F_t = \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \end{pmatrix} - \text{вектора на състоянието};$$

Динамиката на вектора на състоянието се задава с гаусов VAR(1):

$$(1) \quad F_t = \rho F_{t-1} + \Sigma \varepsilon_t,$$

където $\rho = \begin{pmatrix} \rho_L & 0 \\ \rho_0 & \rho_S \end{pmatrix}$; $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ - ковариационната матрица на нормалните iid случайни остатъци, или

$$\begin{pmatrix} L_t \\ S_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_L & 0 \\ \rho_0 & \rho_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1} \\ S_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^L \\ \varepsilon_t^S \end{pmatrix}, \text{ което е еквивалентно на системата}$$

уравнения:

$$L_t = \rho_L L_{t-1} + \sigma_1 \varepsilon_t^L$$

$$S_t = \rho_0 L_{t-1} + \rho_S S_{t-1} + \sigma_2 \varepsilon_t^S$$

Късата лихва се постулира, че е афинна функция на вектора на състоянието, т.е.:

$$(2) \quad i_t = \delta_0 + \delta_1' \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \end{pmatrix} = \delta_0 + L_t + S_t, \quad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и цената на риска също се постулира, че е афинна функция на вектора на състоянието:

$$(3) \quad \Lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1' F_t; \text{ където } \Lambda_t = \begin{pmatrix} \Lambda_L \\ \Lambda_S \end{pmatrix}_t; \lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0^L \\ \lambda_0^S \end{pmatrix}; \lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Уравненията (1), (2) и (3) определят нашия афинен, гаусов, неарбитражен, (само) финансов модел.

2.2. Изграждане на общия макро-финансов афинен гаусов не-арбитражен модел

Тук вектора на състоянието се допълва с новите макро-променливи и така динамиката на вектора на състоянието става векторна авторегресия (от първи ред), но от по-висока размерност (равна на новата, допълнена размерност на вектора на състоянието). За да се извърши това е необходимо да се моделират латентните фактори като функции на инфлацията, инфлационната цел, брутния вътрешен продукт, и така чрез тях да се опишат по-добре динамиката на кривата на доходност. За тази цел се използва вариант на правилото на Тейлър [Taylor, John B. 1993; Taylor, John B. 1999]. Освен това се дава експлицитно описание на поведението на инфлацията и брутния вътрешен продукт (едно чрез друго) извеждайки ги от нео-кенсианската теория. Същественото в това описание е че то допуска, освен авторегресионни части от по-висок ред с нормално разпределение на остатъците, и части свързани с очакванията за бъдещото състояние на инфлацията и брутния вътрешен продукт (изразени като условно математическо очакване).

Следвайки тази схема, беше решено нашият макро-финансов модел да е система от следните уравнения, от [Rudebusch, G.D. and Wu, T. 2003]: уравнения (3.4), (3.8), (4.6) и уравнението за output gap, което се получава като се замести (4.1) в (4.8). Това ще рече че, ще се използва по-опростен модел от предложения в [Rudebusch, G.D. and Wu, T. 2003]. Ограничаваме се само до режима с автокорелирани шокове от първи ред, когато реакцията на централните банки не се обяснява само с инфлацията и брутния вътрешен продукт, но и с други фактори, неприсъстващи в модела.

Динамиката на разглежданата икономическа система се описва от следната система уравнения:

$$(4) \quad \pi_t = \mu_\pi L_t + (1 - \mu_\pi)(\alpha_{\pi_1} \pi_{t-1} + \alpha_{\pi_2} \pi_{t-2}) + \alpha_y y_{t-1} + \varepsilon_{\pi,t}$$

$$(5) \quad y_t = (1 - \mu_y)(\beta_{y_1} y_{t-1} + \beta_{y_2} y_{t-2}) - \beta_r S_{t-1} + \mu_y E_t y_{t+1} + \varepsilon_{y,t}$$

$$(6) \quad L_t = \rho_L L_{t-1} + (1 - \rho_L) \pi_t + \varepsilon_{L,t}$$

$$(7) \quad S_t = \gamma_\pi (\pi_t - L_t) + \gamma_y y_t + u_{S,t}$$

$$(8) \quad u_{S,t} = \rho_u u_{S,t-1} + \varepsilon_{S,t}$$

където π е инфлацията, y е *output gap*; L е първият латентен фактор, съответстващ на нивото на кривата на доходност; S е вторият латентен фактор, съответстващ на наклона на кривата на доходност; u са шоковете в които се съдържат влияния на други фактори неотчетени в модела.

3. Определяне на доходността за всяка точка от кривата на доходност.

Това става с помощта на афинността на модела и използвайки риск-неутралното оценяване, като се представя логаритъма на цената на бондовете като афинна функция от краткосрочната лихва, или като афинна функция на вектора на състоянието. За да се представи това експлицитно за цена на бонд с произволен матуритет, е необходимо да се определят два параметра. Това е разписано алгоритмично, на 10 стъпки, в приложение 1. Използвайки приложение 1, за всяка доходност с матуритет j , пресмятаме необходимите за изразяването на произволна точка от кривата на доходност като афинна функция на вектора на състоянието - коефициенти A_j и B_j рекурсивно:

$$A_1 = -\delta_0; B_1 = -\delta_1; \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1 + B_1^T (-\Sigma \lambda_0) + 1/2 B_1^T \Sigma \Sigma^T B_1 + A_1 \text{ е число}$$

$$B_2 = B_1^T (\rho - \Sigma \lambda_1) + B_1 \text{ е двумерен вектор}$$

$$A_{j+1} = A_j + B_j^T (-\Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} B_j^T \Sigma \Sigma^T B_j + A_1;$$

$$B_{j+1} = B_j^T (\rho - \Sigma \lambda_1) + B_1;$$

където Σ е ковариационната матрица на остатъците, от VAR (1) описваща динамиката на вектора на състоянието F_t ; $j = 1, 2, \dots, J$; а J е последната точка от кривата на доходност

$$A_j(\lambda_0, \lambda_1, \Sigma, \rho, \delta_0) = A_j(\lambda_0, \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_L & 0 \\ \rho_0 & \rho_S \end{pmatrix}, \delta_0) \text{ е число;}$$

$$B_j(\lambda_1, \Sigma, \rho) = B_j(\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_L & 0 \\ \rho_0 & \rho_S \end{pmatrix}) \text{ е двумерен вектор, } \begin{pmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \end{pmatrix} = B_j.$$

4. Представяне на макро-финансовия модел като VAR(1).

Тръгвайки от системата уравнения (4) – (8), описваща възприетия макрофинансов модел, целта е:

- 1. да определим вектора на състоянието за макрофинансовия модел;
- 2. така да преформулираме системата уравнения описваща модела, че в лявата част да са само настоящи променливи, а в дясната лагирани с един лаг назад променливи + случайни остатъци (с гаусово разпределение). Това ще ни позволи да представим системата уравнения описваща модела като гаусов VAR(1).

Това става на следните етапи:

Първо. Определя се точния вид на матриците от параметри. За възприетия от нас макро-финансов модел, т.е. системата от уравнения (4) – (8), вектора на състоянието X_t има вида: $X_t = (\pi_t, \pi_{t-1}, y_t, y_{t-1}, L_t, S_t, u_{S,t}, E_t y_{t+1})$.

В общия случай размерността на вектора на състоянието е по-голяма от броя на уравненията на модела и затова модела трябва да се допълни с тавтологични уравнения (например от вида инфлация = инфлация). Така размерността на матриците от параметри ще станат равни на вектора на състоянието.

Второ. Редуцирането на вектора на състоянието, става като се пресмята векторната авторегресия. Това стандартно се прави, като се умножи матричното уравнение от двете страни с обратната матрица на матрицата от коефициенти пред вектора на състоянието. Тъй-като размерностите са високи това не е тривиална задача, затова се използват алгоритми, които прилагат разлагането на Schur, за да приведат векторната авторегресия в удобен вид [Paul Söderlind 1999], [Sims, Christopher 2001]. Като преди всичко това, трябва да се направи и проверка за неособенност на матрицата от коефициенти пред вектора на състоянието. Така новата удобна форма на векторната авторегресия, задаваща динамиката на редуцирания вектор на състоянието, е готова за калибрация.

В нашето изследване ние постигнахме това, за четири стадия, като използвахме апарата за смяна на променливите. Детайлното описание на този алтернативен подход е представено в приложение 2.

5. Калибрация на модела.

За американската крива на доходност, получаваме осем мерна векторна регресия (от първи ред) на наблюдаемите величини спрямо вектора на състоянието – виж приложение 2. Но в динамиката на вектора на състоянието, вектора от случайните остатъци е четири мерен. За това ние допускаме, че 4 точки от кривата на доходност се наблюдават с грешки, които са независими с еднакво нормално разпределение. Така с тях допълваме вектора от случайните остатъци, който става осем мерен (колкото е размерността на векторната регресия).

Следвайки подходите в [Duffee, G.R. 2002], [Hördahl, Tristani, and Vestin 2003], [Rudebusch and Wu 2003], [Ang, A. and M. Piazzesi 2003], решихме новата удобна форма на векторната авторегресия (от етап 4), да се калибрира чрез многомерния метод на максимално правдоподобие. Тъй-като остатъците са

нормално разпределени съвместната плътност на разпределение е нормална, но е условна - което следва от динамиката на вектора на състоянието.

Описание на реализираната от нас многомерна функция на максимално правдоподобие е дадена в приложение 3. Тя е 36 мерна, силно нелинейна функция и това значително затруднява нейната оптимизация при съвременното състояние на хардуерните и софтуерни платформи.

Като открит въпрос остана олекотяването на изчислителната тежест на софтуерните алгоритми, реализиращи многомерния метод на максимално правдоподобие. Това би могло да стане, като се привличат макро-икономически знания, с помоща на които, някои от параметрите да се фиксират, и параметричното пространство да се ограничи по размерност и обем.

Освен това, би могло да се опита, модела да се калибрира чрез двустъпкова процедура. Тя е следната: Първо да се оцени (само)финансовия модел, а след това така оценените параметри да се фиксират във макро-финансовия модел и оставащите параметри да се оценят. Ние не успяхме да реализираме докрай този етап, тъй-като времето на договора ни изтече.

IV. Софтуерна реализация

Беше решено модела да се реализира на софтуерната платформа Матлаб. Софтуерната реализация се състои от три части:

- 1. “вътрешна част” - в нея се реализира функцията на правдоподобие (Представена е в Приложение 4);
- 2. “външна част” (Представена е в Приложение 5); - в нея се въвеждат данните и се инициализират променливите които се използват във “вътрешната част”;
- 3. “предварителна част” – в нея се изчисляват латентните фактори.

1. В началото на “вътрешната част” се задават вектора от параметри “theta” на макро-финансовия модел – в нашия конкретен случай той е 36 мерен. След това с помоща на цикъл (с дължина равна на максималният матуритет на наблюдаваните точки от кривата на доходност – в примера с който работим той е 120) се пресмятат рекурсивно параметрите A и B, които са необходими за определянето на доходността в произволна точка от кривата (от етап 3). A е число, а B е двумерен вектор от числа. След това, за да пестим памет, избираме кои точно A-та и B-та да запазим – а това са тези които отговарят на матуритетите на наблюдаваните точки. Това става с помоща на променлива-вектор “mat”, в него са изброени по възходящ ред матуритетите на наблюдаемите доходности. *Дължината на цикъла и променливата-вектор “mat” се задават във външната част.* По-нататък се описват матрицата “gamma” пред отместения с един лаг назад вектор на състоянието, и вектора “em” – свободния член в матричното уравнение. За нашия конкретен пример те са съответно 8x7 и 8x1, матрицата “omega” - пред вектора на случайните остатъци е 8x8 мерна.

След това се пресмята матричното уравнение за да се определи вектора на случайните остатъци (описан в Приложение 2).

По-нататък, така полученият 8 мерен вектор се подава на процедурата от Matlab “mvnpdf”. Тази процедура изчислява многомерната плътност на съвместно нормално разпределен случаен вектор (а такава е нашето допускане за вектора на случайните остатъци, възприето от макро-финансовата литература). Тя изисква като входни параметри освен случайния вектор, така също и неговите математическо очакване и ковариационна матрица. При нас, следвайки макро-финансовата литература, е възприето допускането за съвместно нормално разпределение с математическо очакване 0 и единична диагонална ковариационна матрица. След това, така определената функция на плътността на разпределението на вектора на случайните остатъци се умножава по модула на детерминантата на обратната матрица на ω (т.е. якобиана) и цялата тази процедура се извършва за всяко наблюдение, и се сумира по резултатите от всички наблюдения.

Така полученият резултат е търсената функция на правдоподобие. Както беше по-горе отбелязано за нашия пример тя е 36 мерна. Сега остава тя да се максимизира относно 36 размерния вектор на параметрите θ . *Това става във външната част.* Там използваме процедура на Матлаб, която минимизира многомерна функция с ограничения. И затова, накрая взимаме стойността на функцията на правдоподобие с отрицателен знак. Така завършва реализацията на функцията на правдоподобие – цялата тази “вътрешна част” е посветена на това и сме я именували с функцията “objectiveforTSIR”.

2. В началото на “външната част” се изчиства Workspace, за да не се припокриват стари стойности на вече използвани променливи. След това в съответни матрици се въвеждат векторът на наблюдаемите за всяко наблюдение и векторът на състоянието за всяко наблюдение. Да припомним че за нашия пример тези вектори са съответно осем и седем мерни, това означава, че размерността на матриците в които ще ги съхраняваме, ще са 8 по броя на наблюденията, и съответно 7 по броя на наблюденията.

След това се инициализира дължината на цикъла който изчислява A и B , а след това се въвежда самият вектор “mat”, в който са изброени по възходящ ред матуритетите на наблюдаемите доходности.

По-нататък се въвеждат началните стойности на параметрите, т.е. това е началната точка от която стартира метода за минимизация на нашата 36-мерна функция (на правдоподобие). Следват въвеждане на горни и долни граници на изменение на параметрите, инициализация на процедурата за минимизация и задаването на функцията на минимизация. За да минимизираме 36-мерната функция получена във вътрешната част, използваме процедура на Матлаб “fmincon”, която минимизира многомерна функция с ограничения. Като входни данни тя използва функцията която ще се минимизира (това при нас е “objectiveforTSIR”), началната точка на вектора от параметри и долните и горни граници на изменение на тези параметри. Резултата който връща е стойността в който функцията достига

минимум и точката в която се достига този минимум, като разбира се тази точка принадлежи на допустимото множество зададено от ограниченията.

3. Преди да се стартира всичко това е необходимо да се извлекат латентните фактори, които определят динамиката на системата от наблюдаваните точки от кривата на доходност. Това е необходимо, тъй-като те (латентните фактори), са компоненти на вектора на състоянието. Това става по следния начин: с помощта на функцията от Матлаб “`princomp`”, която извършва анализ на главните компоненти, се изчисляват собствените стойности на ковариационната матрица на оригиналните данни. От тях могат да се определят каква част от дисперсията на системата се обхваща от новите трансформирани временни редове. В един от параметрите на “`princomp`” се представят новите (преобразувани) временни редове. Така ние ще разполагаме с временните редове на латентните фактори, които определят динамиката на наблюдаваните точки от кривата на доходност. За нашия пример (разполагайки с временни редове в 6-те точки) определихме че първият латентен фактор обхваща 95,14 %, а вторият 4,41 % от дисперсията на наблюдаваната система, това означава, че тези 2 латентни фактора са достатъчни за моделиране на динамиката на американската крива. За сравнение при Rudebusch и Wu първият латентен фактор обхваща 93,1 %, а вторият 6,2 % от дисперсията на наблюдаваната система. Така определените латентни фактори участват в конструирането на вектора на състоянието на макро-финансовия модел.

V. Заключение

Многофакторните модели за срочна структура на лихвените проценти, използвайки макро-фактори са в началния етап на своето развитие. Би могло да се мисли за усъвършенстването им по следните направления:

- Допускане и проверка за различно от нормалното разпределение на случайните остатъци.

Финансовите редове, като правило, не са нормално разпределени, затова би могло да се очаква, че проверката ще отхвърли хипотезата за нормално разпределение. Тогава може да се приложат техни обобщения като например алфа-стабилните разпределения.

- Проверка за реда на векторната авторегресия.

Основателна е възприетата конвенция за VAR(1), имайки основания в непрекъснатите си аналози като процеси на Ито. Все пак е оправдана проверката за реда на VAR. В общия случай би трябвало да се очаква, че реда ѝ ще е по-голям от 1 и тогава може да се моделират с VAR от по-висок ред.

- Проверка за наличие на ARCH ефект.

Изискването за независимост и стационарност на случайните остатъци е съвсем неестествено и много ограничително. При положителен тест за зависимост

на случайните остатъци, би могло да се опита моделирането на динамиката на кривата на доходност с помощта на развития апарат на ARCH и GARCH моделите.

- Олекотяване на изчислителната тежест на софтуерните алгоритми, реализиращи многофакторните макро-финансови модели за срочна структура на лихвените проценти.

По природа тези модели съдържат много параметри. Освен това техните целеви функции са силно нелинейни и много рядко се изразяват в явен вид. Това създава значителни проблеми на етапа на калибрация на модела. Би могло да се опита, привличайки макро-икономически знания, някои от параметрите да се фиксират, и параметричното пространство да се ограничи по размерност и обем. Също така може да се помисли за разпаралеляване на процеса на калибрация.

- Алтернативи на метода на максимално правдоподобие подходи за калибрация на модела. Би могло да се опита моделите да се калибрират чрез филтъра на Калман.

Проведеното изследване е едно от първите в България по такава развойна тема, каквато са моделите за срочна структура на лихвените проценти. То би могло да служи като основа за мащабни разработки, по примера на ECB и FED, в областта на моделирането на кривата на доходност, и използването му при практическото формиране на инвестиционната стратегия на БНБ.

Цитирани източници:

- Ang, A. and M. Piazzesi (2003), "No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables," *Journal of Monetary Economics* 50, 745-787.
- Bjork, T. (1996), Interest Rate Theory. In: *Financial Mathematics*. Bressanone, 1996
- Black, F., E. Derman, and W. Toy. (1990) A one-factor model of interest rates and its application to Treasury bond options, *Financial Analysts Journal*
- Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81
- Clarida, Richard, Jordi Galí, and Mark Gertler (1999), "The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective," *Journal of Economic Literature* 37, 1661-1707.
- Cox, J., J. Ingersoll, S. Ross (1985) A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53, 385-408

- Cox, Ross & Rubinstein (1979) option pricing model, *A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics 7, pp. 229-263.
- Dai, Q., Singleton, K., 2000. Specification Analysis of Affine Term Structure Models, Journal of Finance, 55, 1943-78.
- Dai, Q., Singleton, K., 2002. Expectation Puzzles, Time-varying Risk Premia, and Affine Models of the Term Structure, Journal of Financial Economics, 63, 415-41.
- Diebold, F.X. and Li, C. (2003), "Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields," Manuscript, Department of Economics, University of Pennsylvania.
- Duffie, D. and R. Kan (1996), "A Yield-Factor Model of Interest Rates," Mathematical Finance 6, 379-406.
- Duffee, G.R. (2002), "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models," Journal of Finance 57, 405-443.
- Evans, C.L. and D.A. Marshall (2001), "Economic Determinants of the Term Structure of Nominal Interest Rates," manuscript, Federal Reserve Bank of Chicago.
- J.M. Harrison and D.M. Kreps. (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. Journal of Economic Theory, 20, No. 3:381-408, 1979
- Ho, T. and S. Lee (1986) Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. Journal of Finance 41, 1001-1029
- Hördahl, Peter, Oreste Tristani, and David Vestin (2003), "A Joint Econometric Model of Macroeconomic and Term Structure Dynamics," manuscript, European Central Bank.
- Hull, J. and A. White (1990) Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies* 3, 573-592
- Merton, R. C. (1973) Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4
- Merton, R. (1974) On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, *Journal of Finance* 2, 449-470.

Paul Söderlind (1999), "Solution and Estimation of RE Macromodels with Optimal Policy," *European Economic Review*, 43, 813-823.

Rudebusch, G.D. and Wu, T. (2003), "A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy, and the Economy," Manuscript, Federal Reserve Bank of San Francisco.

Sims, Christopher (2001), "Solving Linear Rational Expectations Models", *Computational Economics* 20, 1-20.

Taylor, John B. (1993), "Discretion versus Policy Rules in Practice," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 39, 195-214.

Taylor, John B. (1999), *Monetary Policy Rules*, Chicago, IL: Chicago University Press.

Vasicek, O. (1977) An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics* 5.

Бокс Дж., Дженкинс Г. (1976) Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1976. – Вып. 1, 2.

Айвазян С.А. и Мхитарян В.С. (1998) Прикладная статистика и основы эконометрии. – М.: ЮНИТИ, 1998.

Приложение 1

Означения:

E_t – условното математическо очакване относно момента t ;

$E_{Q,t}$ – Условното математическо очакване спрямо вероятностната мярка Q ;

Z_t – произволна случайна величина;

X_t – вектора на състоянието и за двата модела (само-финансовия и макро-финансовия).

Следва алгоритмично разписване на етап 3. Този етап може да се представи чрез следните стъпки:

1. Неарбитражността на пазара, е еквивалентна на съществуването на еквивалентна мартингална мярка Q за този пазар, съгласно Теорията за риск-неутралното оценяване;
2. Чрез Q , или по-точно, чрез $E_{Q,t}$ се записва сконтовия фактор

$$(1 + r_t)^{-(T-t)} \sim \exp\left(-\int_t^T r_\tau \alpha_\tau\right) \text{ стохастично – т.е. във вида:}$$

$$E_{Q,t} \left[\exp\left(-\int_t^T r_\tau \alpha_\tau\right) \right],$$

където r_t и r_τ е късата лихва на директното и съответно непрекъснато олихвяване, t – настоящият момент, T – момента на падежа, при допускането, че в момента на падежа T , безкупонната облигация има цена = 1;

3. Чрез производната на Радон-Никодим ξ_{t+1} преминаваме от мартингалната мярка Q към пазарната (физическата или генериращата данните) мярка P . Така за всяка случайна величина Z_{t+1} е изпълнено $E_{Q,t}(Z_{t+1}) = E_{P,t}(\xi_{t+1} Z_{t+1}) / \xi_t$. Допускането за съществуване на производната на Радон-Никодим ξ_{t+1} е ключов момент за връщането на разглеждания в (физическата или генериращата данните) мярка P ;
4. От дискретния аналог на вариант на теоремата на Гирсанов следва че:
 - 1. съществува случаен процес λ_t , наречен цена (или премия) за риска, т.ч., λ_t = свръх-доходността/риска; и
 - 2. производната на Радон-Никодим ξ_{t+1} е логнормален процес т.ч., $\xi_{t+1} = \xi_t \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_t^T \lambda_t - \lambda_t^T \varepsilon_{t+1}\right)$; където ε_{t+1} са шоковете, свързани с източниците на несигурност (неопределеност);

5. Постулира се, че: $\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t$; където λ_0 е n -мерен вектор; X_t е $n \times m$ матрица, n -размерността на вектора на състоянието X_t , т.е. цената за риска λ_t е афинна функция от вектора на състоянието X_t ;
6. Отиваме в 2 стъпка и полагаме ценовото ядро $m_{t+1} = \exp(-r_t) \xi_{t+1} / \xi_t$;
7. Цената на безкупонен бонд с матуритет $n+1$ ще се изчисли рекурсивно чрез $b_{n+1,t} = E_{p,t}(m_{t+1} b_{n,t+1})$; където $b_{n+1,t}$ е безкупонна облигация с матуритет $(n+1)$ в момента t ;
8. От $r_t = -\frac{\text{Ln} b_{n,t}}{T-t}$, следва $b_{n,t} = \exp(A_n + B_n^T X_t)$;
9. С помощта на стъпка 7 определяме рекурсивно A_n и B_n , а именно в сила са $A_{j+1} = A_j + B_j^T (-\Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} B_j^T \Sigma \Sigma^T B_j + A_1$ и $B_{j+1} = B_j^T (\rho - \Sigma \lambda_1) + B_1$; където Σ е ковариационната матрица на остатъците, от VAR (1) описваща динамиката на вектора на състоянието X_t ; $j = 1, 2, \dots, J$; J е последната точка от кривата на доходност, а ρ е матрицата от коефициенти пред X_{t-1} във VAR(1) описваща динамиката на вектора на състоянието X_t
10. От $r_t = -\frac{\text{Ln} b_{n,t}}{T-t}$ определяме доходността с произволен матуритет n , като
$$y_{n,t} = -\frac{L_n b_{n,t}}{n} \overline{A_n} + \overline{B_n^T} X_t;$$
 където $y_{n,t}$ е доходността с падеж (n) на безкупонната облигация,
$$\overline{A_n} = -\frac{A_n}{n}; \overline{B_n} = -\frac{B_n}{n}.$$

Приложение 2

Тръгвайки от системата уравнения описваща възприетия макрофинансов модел, следва:

-1. Дефиниране на вектора на състоянието: X_t . За предложената система: (4) – (8), той има вида: $X_t = (\pi_t, \pi_{t-1}, y_t, y_{t-1}, L_t, S_t, u_{S,t}, E_t y_{t+1})$.

-2. Преформулиране на системата (4) – (8), съгласно етап 4, точка 2. За целта полагаме:

$$x_{1,t} = \pi_t;$$

$$x_{2,t} = \pi_{t-1}, \text{ тогава } \pi_{t-2} = x_{1,t-1};$$

$$x_{3,t} = y_t;$$

$$x_{4,t} = y_{t-1}, \text{ тогава } y_{t-2} = x_{4,t-1};$$

$$x_{5,t} = L_t;$$

$$x_{6,t} = S_t;$$

$$x_{7,t} = u_{S,t};$$

$$x_{8,t} = E_t y_{t+1}, \text{ тогава } y_t = x_{8,t-1} + \eta_t, \text{ т.е. } x_{3,t} = x_{8,t-1} + \eta_t; \eta_t \text{ се интерпретира като}$$

грешката при прогноза за y_t . Прогнозата е изразена като условно математическо очакване. Теоретичната база на такъв подход към прогнозирането обезпечава известния резултат, от теорията на прогнозирането на Ууд-Колмогоров-Винер, в съответствие с който най-добра (в смисъл на средноквадратична грешка) линейна прогноза в момента t с хоризонт l е условното математическо очакване на случайната величина x_{t+l} , изчислено при условие, всичките значения x_τ до момента време t .

Относно променливите $x_{i,t}$ уравненията на системата (4) – (8), придобиват вида:

$$(9) \quad x_{1,t} = (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1} + \mu_\pi x_{5,t} + \varepsilon_{\pi,t}$$

$$(10) \quad x_{2,t} = x_{1,t-1}$$

$$(11) \quad x_{3,t} = (1 - \mu_y)(\beta_{y_1} x_{3,t-1} + \beta_{y_2} x_{4,t-1}) - \beta_r x_{6,t-1} + \mu_y x_{8,t} + \varepsilon_{y,t}$$

$$(12) \quad x_{4,t} = x_{3,t-1}$$

$$(13) \quad x_{5,t} = \rho_L x_{5,t-1} + (1 - \rho_L) x_{1,t} + \varepsilon_{L,t}$$

$$(14) \quad x_{6,t} = \gamma_\pi (x_{1,t} - x_{5,t}) + \gamma_y x_{3,t} + x_{7,t}$$

$$(15) \quad x_{7,t} = \rho_u x_{7,t-1} + \varepsilon_{S,t}$$

$$(16) \quad x_{8,t} = x_{8,t-1} + \eta_t$$

съответно вектора на състоянието $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}, x_{5,t}, x_{6,t}, x_{7,t}, x_{8,t})^T$. Така размерността на новата система (9) – (16) е равна на размерността на вектора на състоянието X_t .

С това първата цел от етап 4 е постигната. Сега ще преобразуваме новата система (9) – (16) в удобен за калибриране вид (съгласно казаното в точка 2 от етап 4), на четири стадия, по следния начин:

Първи стадий: Решаваме (9) и (13) спрямо $x_{1,t}$ и $x_{5,t}$. Това го правим, като умножаваме (13) с μ_π и го прибавяме към (9). Така получаваме:

$$x_{1,t} = (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} x_{2,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1} + \rho_L \mu_\pi x_{5,t-1} + (1 - \rho_L) \mu_\pi x_{1,t} + \varepsilon_{\pi,t} + \mu_\pi \varepsilon_{L,t}$$

За удобство на записа да положим:

$$k = 1 - (1 - \rho_L) \mu_\pi;$$

Така получаваме:

$$(17) \quad x_{1,t} = ((1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} / k) x_{1,t-1} + ((1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} / k) x_{2,t-1} + (\alpha_y / k) x_{3,t-1} + (\rho_L \mu_\pi / k) x_{5,t-1} + \varepsilon_{\pi,t} / k + (\mu_\pi / k) \varepsilon_{L,t}$$

Заместваме в (13) и получаваме:

$$x_{5,t} = \rho_L x_{5,t-1} + 1 - \rho_L [(1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} x_{2,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1} + \rho_L \mu_\pi x_{5,t-1} + \varepsilon_{\pi,t} + \mu_\pi \varepsilon_{L,t}] / k + \varepsilon_{L,t}$$

От тук получаваме:

$$(18) \quad x_{5,t} = ((1 - \rho_L) / k) [(1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} x_{2,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1}] + (\rho_L / k) x_{5,t-1} + ((1 - \rho_L) / k) \varepsilon_{\pi,t} + (1 / k) \varepsilon_{L,t}$$

Чрез аналогични преобразувания от (11) и (16) получаваме:

$$(19) \quad x_{8,t} = ((\mu_y - 1) \beta_{y_1} / \mu_y) x_{3,t-1} + ((\mu_y - 1) \beta_{y_2} / \mu_y) x_{4,t-1} + (\beta_r / \mu_y) x_{6,t-1} + x_{8,t-1} / \mu_y - \eta_t / \mu_y$$

От (14), (15), (16) и (18) получаваме:

$$x_{1,t} - x_{5,t} = -\rho_L x_{5,t-1} + \rho_L [(1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} x_{2,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1} + \rho_L \mu_\pi x_{5,t-1} + \varepsilon_{\pi,t} + \mu_\pi \varepsilon_{L,t}] / k - \varepsilon_{L,t} = \rho_L [(1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} x_{2,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1} + (\mu_\pi - 1) x_{5,t-1}] / k + \rho_L \varepsilon_{\pi,t} / k + (\mu_\pi - 1) \varepsilon_{L,t} / k, \quad \text{така достигаем до}$$

$$(20) \quad x_{6,t} = S_t = \gamma_\pi (\pi_t - L_t) + \gamma_y y_\varepsilon + u_{S,t} = \gamma_\pi (x_{1,t} - x_{5,t}) + \gamma_y x_{3,t} + x_{7,t} = \gamma_\pi \rho_L [(1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + (1 - \mu_\pi) \alpha_{\pi_2} x_{2,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1} + (\mu_\pi - 1) x_{5,t-1}] / k + \rho_L x_{5,t-1} + \gamma_y x_{8,t-1} + \gamma_\pi \rho_L \varepsilon_{\pi,t} / k + \gamma_\pi (\mu_\pi - 1) \varepsilon_{L,t} / k + \gamma_y \eta_t + \varepsilon_{S,t}$$

Окончателно системата се състои от (17), (10), (16), (12), (18), (20), (15) и (19).

Въвеждаме кратки означения за коефициентите:

$$(17) \quad x_{1,t} = c_{11} x_{1,t-1} + c_{12} x_{2,t-1} + c_{13} x_{3,t-1} + 0 + c_{15} x_{5,t-1} + 0 + \dots + j_{1\pi} \varepsilon_{\pi,t} + j_{1L} \varepsilon_{L,t}$$

$$(10) \quad x_{2,t} = x_{1,t-1} + 0 + \dots$$

$$(16) \quad x_{3,t} = 0 + 0 + \dots + x_{8,t-1} + 0 + \dots + \eta_t$$

$$(12) \quad x_{4,t} = 0 + 0 + x_{3,t-1} + 0 + \dots$$

$$(18) \quad x_{5,t} = c_{51} x_{1,t-1} + c_{52} x_{2,t-1} + c_{53} x_{3,t-1} + 0 + c_{55} x_{5,t-1} + 0 + \dots + j_{5\pi} \varepsilon_{\pi,t} + j_{5L} \varepsilon_{L,t}$$

$$(20) \quad x_{6,t} = \gamma_{\pi} \rho_L [(1 - \mu_{\pi}) \alpha_{\pi_1} x_{1,t-1} + (1 - \mu_{\pi}) \alpha_{\pi_2} x_{2,t-1} + \alpha_y x_{3,t-1} + (\mu_{\pi} - 1) x_{5,t-1}] / k + \\ + \rho_u x_{7,t-1} + \gamma_y x_{8,t-1} + \gamma_{\pi} \rho_L \varepsilon_{\pi,t} / k + \gamma_{\pi} (\mu_{\pi} - 1) \varepsilon_{L,t} / k + \gamma_y \eta_t + \varepsilon_{S,t}$$

$$(15) \quad x_{7,t} = 0 + \dots + c_{77} x_{7,t-1} + 0 + \dots + \varepsilon_{S,t}$$

$$(19) \quad x_{8,t} = 0 + 0 + c_{83} x_{3,t-1} + c_{84} x_{4,t-1} + 0 + c_{86} x_{6,t-1} + 0 + c_{88} x_{8,t-1} + j_8 \eta_t$$

Нека означим така получената система с (*). Тя е осем мерна VAR(1), защото се състои в лявата част само от променливи в настоящия момент t , а в дясната лагирани с един лаг назад променливи + случайни остатъци. В нея обаче влизат и ненаблюдаемите величини $x_{7,t}$ и $x_{8,t}$ затова във втория стадий ще се занимаем най-напред с тях. Като $x_{8,t}$ ще го изразим чрез останалите и така ще редуцираме размерността на вектора на състоянието.

Втори стадий. За $x_{7,t}$ получаваме:

$$x_{7,t} = c_{77} x_{7,t-1} + \varepsilon_{S,t} = c_{77} (c_{77} x_{7,t-1} + \varepsilon_{S,t-1}) + \varepsilon_{S,t} = c_{77}^2 x_{7,t-1} + c_{77} \varepsilon_{S,t-1} + \varepsilon_{S,t} = \\ = c_{77}^2 (c_{77} x_{7,t-2} + \varepsilon_{S,t-2}) + c_{77} \varepsilon_{S,t-1} + \varepsilon_{S,t} = c_{77}^3 x_{7,t-2} + c_{77}^2 \varepsilon_{S,t-2} + c_{77} \varepsilon_{S,t-1} + \varepsilon_{S,t}$$

Индуктивно заключаваме, че

$$x_{7,t} = c_{77}^t x_{7,1} + c_{77}^{t-1} \varepsilon_{S,1} + c_{77}^{t-2} \varepsilon_{S,2} + \dots + \varepsilon_{S,t}$$

Ако остатъците са едни и същи при всяка стъпка, т.е. $\varepsilon_{S,t}$ не зависи от t , или с други думи $\varepsilon_{S,t}$ е строго стационарен процес, тогава можем да изразим

$$(21) \quad x_{7,t} = c_{77}^t x_{7,1} + (c_{77}^{t-1} + \dots + c_{77} + 1) \varepsilon_S, \text{ членът пред } \varepsilon_S \text{ е сума на геометрична прогресия и затова получаваме:}$$

$$(22) \quad x_{7,t} = c_{77}^t x_{7,1} + ((c_{77}^t - 1) / (c_{77} - 1)) \varepsilon_S$$

Сега да разгледаме $x_{8,t}$. От (16) и (19) получаваме:

$$x_{8,t-1} = x_{3,t-1} - j \eta_t \\ x_{8,t} = c_{83} x_{3,t-1} + c_{84} x_{3,t-2} + c_{86} x_{6,t-1} + c_{88} x_{3,t-1} - c_{88} j \eta_t + \eta_t = \\ = c_{83} x_{3,t-1} + c_{84} x_{3,t-2} + c_{88} x_{3,t-1} + c_{86} x_{6,t-1} + (1 - c_{88} j) \eta_t$$

От тук като заменим t с $t-1$ получаваме

$$(23) \quad x_{8,t-1} = c_{83} x_{3,t-2} + c_{84} x_{3,t-3} + c_{86} x_{6,t-2} + c_{88} x_{3,t-1} + (1 - c_{88} j) \eta_{t-1}$$

Трети стадий. Сега ще изразим наблюдаваните точки от кривата на доходност като афинна функция на латентните фактори, чиято динамика се дава с уравненията (18) и (20): За всяка доходност i_i с матуритет i :

$$i_i = a_i + (b_{i1}; b_{i2}) \begin{pmatrix} x_{5,t} \\ x_{6,t} \end{pmatrix} = \\ = a_i + b_{i1} (c_{51} x_{1,t-1} + c_{52} x_{2,t-1} + c_{53} x_{3,t-1} + c_{55} x_{5,t-1} + j_{5,\pi} \varepsilon_{\pi,t} + \gamma_{5,L} \varepsilon_{L,t}) + b_{i2} (c_{61} x_{1,t-1} + c_{62} x_{2,t-1} \\ + c_{63} x_{3,t-1} + c_{65} x_{5,t-1} + c_{67} x_{7,t-1} + c_{68} x_{8,t-1} + j_{6,\pi} \varepsilon_{\pi,t} + j_{6,L} \varepsilon_{L,t} + \gamma_y \eta_t + \varepsilon_{S,t}) = \\ = a_i + c_{67} c_{77}^{t-1} b_{i2} x_{7,1} + (b_{i1} c_{51} + b_{i2} c_{61}) x_{1,t-2} + \\ + (b_{i2} c_{52} + b_{i2} c_{62}) x_{2,t-1} + b_{i2} c_{68} c_{86} x_{6,t-2} + (b_{i1} c_{53} + b_{i2} c_{63} + b_{i2} c_{68} c_{88}) x_{3,t-1} + \\ + (b_{i1} c_{55} + b_{i2} c_{65}) x_{5,t-2} + b_{i2} c_{68} c_{83} x_{3,t-2} + b_{i2} c_{68} c_{84} x_{3,t-3} +$$

$$+b_{i2}(1 + c_{67}(c_{77}^{t-1} - 1)/(c_{77} - 1))\varepsilon_s + b_{i2}(\gamma_y + c_{68}(1 - c_{88}j))\eta + \\ + (b_{i2}j_{6,\pi} + b_{i2}j_{5,\pi})\varepsilon_{\pi,t} + (b_{i2}j_{6,2} + b_{i2}j_{5,L})\varepsilon_{L,t}$$

За американската крива на доходност имаме 6 такива уравнения, отговарящи на шестте наблюдаеми точки от кривата (виж Приложение 1). Да означим тази система от 6 уравнения с (**).

Разглеждаме като наблюдаеми инфлацията, *output gap* и доходностите т.е: $x_{1,t}, x_{3,t}, i_{1,t}, i_{2,t}, i_{3,t}, i_{4,t}, i_{5,t}, i_{6,t}$ (8 величини). Имаме също 8 случайни остатъка - *iid* променливи $\varepsilon_{\pi,t}, \varepsilon_{L,t}, \eta_t, \varepsilon_{s,t}, \zeta_t, \theta_t, \nu_t, \xi_t$. За да можем да изравним размерността на вектора на наблюдаемите с размерността на вектора на случайните остатъци, допускаме, че 4 точки от кривата на доходност се наблюдават с нормални *iid* грешки. Тези две групи променливи са свързани с уравненията на системите (*) и (**), в които влизат и величините $x_{1,t-1}, x_{2,t-1}, x_{3,t-1}, x_{4,t-1}, x_{5,t-1}, x_{6,t-1}, x_{7,t-1}, x_{8,t-1}$. Ще представим тези връзки в матричен вид, но преди това ще редуцираме размерността на вектора на състоянието.

Четвърти стадий. При произволно t ще изразим наблюдаемите $x_{1,t}, x_{3,t}, i_{1,t}, i_{2,t}, i_{3,t}, i_{4,t}, i_{5,t}, i_{6,t}$ чрез членовете на временните редове $x_{1,r}, x_{3,r}, x_{5,r}, x_{6,r}, i_{1,r}, i_{2,r}, i_{3,r}, i_{4,r}, i_{5,r}, i_{6,r}$ при $r < t$. Сега заместваме (22) и (23) в системите (*) и (**), и получаваме следните връзки между наблюдаемите: Означаваме вместо $(x_{1,t}, x_{3,t}, i_{1,t}, i_{2,t}, i_{3,t}, i_{4,t}, i_{5,t}, i_{6,t}) \Leftrightarrow (z_{1,t}, z_{2,t}, z_{3,t}, z_{4,t}, z_{5,t}, z_{6,t}, z_{7,t}, z_{8,t})$ и вместо случайните остатъци $(\varepsilon_{\pi,t}, \varepsilon_{L,t}, \eta_t, \varepsilon_{s,t}, \zeta_t, \theta_t, \nu_t, \xi_t) \Leftrightarrow (\xi_{1,t}, \xi_{2,t}, \xi_{3,t}, \xi_{4,t}, \xi_{5,t}, \xi_{6,t}, \xi_{7,t}, \xi_{8,t})$ при предположение че $\xi_{3,t}$ и $\xi_{4,t}$ не зависят от t . Така окончателната ни система добива вида (***):

$$\begin{aligned} z_{1,t} &= c_{11}x_{1,t-1} + c_{12}x_{1,t-2} + c_{13}x_{3,t-1} + c_{15}x_{5,t-1} + j_{1,\pi} \xi_{1,t} + j_{1,\alpha} \xi_{2,t} \\ z_{2,t} &= c_{88}x_{3,t-1} + c_{83}x_{3,t-2} + c_{84}x_{3,t-3} + c_{86}x_{5,t-3} + c_{86}x_{6,t-2} + [1 + (1 - c_{88})\xi_t] \xi_3 \\ z_{3,t} &= a_1 + (b_{11}c_{51} + b_{12}c_{61})x_{1,t-1} + (b_{11}c_{52} + b_{12}c_{62})x_{1,t-2} + (b_{11}c_{53} + b_{12}c_{63} + \\ &+ b_{12}c_{68}c_{88})x_{3,t-1} + b_{12}c_{68}c_{83}x_{3,t-2} + b_{12}c_{68}c_{84}x_{3,t-3} + (b_{11}c_{55} + b_{12}c_{68})x_{5,t-1} + \\ &+ b_{12}c_{68}c_{86}x_{6,t-2} + b_{12}c_{67}c_{77}^{t-2}x_{7,1} + (b_{11}j_{5,\pi} + b_{12}j_{6,\pi})\xi_{1,t} + (b_{11}j_{5,\alpha} + b_{12}j_{6,L})\xi_{2,t} + \\ &+ b_{12}[\gamma_y + c_{68}(1 - c_{88}\xi_t)]\xi_{1,t} + b_{12}(1 + c_{67}(c_{77}^{t-1} - 1)/(c_{77} - 1))\xi_4 \\ z_{4,t} &= a_2 + b_{12}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} + (b_{21}c_{51} + b_{22}c_{61})x_{1,t-1} + (b_{21}c_{52} + b_{22}c_{62})x_{1,t-2} + \\ &+ (b_{21}c_{53} + b_{22}c_{63} + b_{22}c_{68}c_{88})x_{3,t-1} + b_{22}c_{68}c_{83}x_{3,t-2} + b_{22}c_{68}c_{84}x_{3,t-3} + \\ &+ (b_{21}c_{55} + b_{22}c_{65})x_{5,t-1} + b_{22}c_{65}c_{86}x_{6,t-2} + (b_{21}j_{5,\pi} + b_{22}j_{6,\pi})\xi_{1,t} + (b_{11}j_{5,\alpha} + \\ &+ b_{22}j_{6,L})\xi_{2,t} + b_{22}[\gamma_y + c_{68}(1 - c_{88}\xi_t)]\xi_3 + b_{22}(1 + c_{67}(c_{77}^{t-1} - 1)/(c_{77} - 1))\xi_4 \\ z_{5,t} &= a_3 + b_{32}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} + (b_{31}c_{51} + b_{32}c_{61})x_{1,t-1} + \dots\dots\dots j_3 \xi_{5,t} \\ z_{6,t} &= a_4 + b_{42}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} + (b_{41}c_{51} + \dots\dots\dots j_9 \xi_{6,t} \\ z_{7,t} &= a_5 + b_{52}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} + (b_{51}c_{51} + \dots\dots\dots j_\nu \xi_{7,t} \\ z_{8,t} &= a_6 + b_{62}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} + (b_{61}c_{51} + \dots\dots\dots j_\nu \xi_{8,t} \end{aligned}$$

Означаваме:

$$y_{1,t-1} = x_{1,t-1}$$

$$y_{2,t-1} = x_{1,t-2}$$

$$y_{3,t-1} = x_{3,t-1}$$

$$y_{4,t-1} = x_{3,t-2}$$

$$y_{5,t-1} = x_{3,t-3}$$

$$y_{6,t-1} = x_{5,t-1}$$

$$y_{7,t-1} = x_{6,t-2}$$

Новият вектор на състоянието добива вида $Y_t = (y_{1,t} \ y_{2,t} \ y_{3,t} \ y_{4,t} \ y_{5,t} \ y_{6,t} \ y_{7,t})^T$.

Уравненията в матричните означения имат вида:

(24) $Z_t = K_t + \Gamma Y_{t-1} + \Omega_t \Xi_t$, където

$$Z_t = (z_{1,t} \ z_{2,t} \ z_{3,t} \ z_{4,t} \ z_{5,t} \ z_{6,t} \ z_{7,t} \ z_{8,t})^T; \quad \Xi_t = (\xi_{1,t} \ \xi_{2,t} \ \xi_{3,t} \ \xi_{4,t} \ \xi_{5,t} \ \xi_{6,t} \ \xi_{7,t} \ \xi_{8,t})^T;$$

$$K_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + b_{12}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} \\ a_2 + b_{22}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} \\ a_3 + b_{32}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} \\ a_4 + b_{42}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} \\ a_5 + b_{52}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} \\ a_6 + b_{62}c_{67}c_{77}^{t-1}x_{7,1} \end{pmatrix};$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{15} & 0 \\ 0 & 0 & c_{88} & c_{83} & c_{84} & 0 & c_{86} \\ b_{11}c_{51} + b_{12}c_{61} & b_{11}c_{52} + b_{12}c_{62} & b_{11}c_{53} + b_{12}c_{63} + b_{12}c_{68}c_{88} & b_{12}c_{68}c_{83} & b_{12}c_{68}c_{84} & b_{11}c_{55} + b_{12}c_{68} & b_{12}c_{68}c_{86} \\ b_{21}c_{51} + b_{22}c_{61} & b_{21}c_{52} + b_{22}c_{62} & b_{21}c_{53} + b_{22}c_{63} + b_{22}c_{68}c_{88} & b_{22}c_{68}c_{83} & b_{22}c_{68}c_{84} & b_{21}c_{55} + b_{22}c_{68} & b_{22}c_{68}c_{86} \\ b_{31}c_{51} + b_{32}c_{61} & b_{31}c_{52} + b_{32}c_{62} & b_{31}c_{53} + b_{32}c_{63} + b_{32}c_{68}c_{88} & b_{32}c_{68}c_{83} & b_{32}c_{68}c_{84} & b_{31}c_{55} + b_{32}c_{68} & b_{32}c_{68}c_{86} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{61}c_{51} + b_{62}c_{61} & b_{61}c_{52} + b_{62}c_{62} & b_{61}c_{53} + b_{62}c_{63} + b_{62}c_{68}c_{88} & b_{62}c_{68}c_{83} & b_{62}c_{68}c_{84} & b_{61}c_{55} + b_{62}c_{68} & b_{62}c_{68}c_{86} \end{pmatrix};$$

$$\Omega_t = \begin{pmatrix} j_{1,\pi} & j_{1,\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (1 - c_{88})j_{\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11}j_{5,\pi} + b_{12}j_{6,\pi} & b_{11}j_{5,\alpha} + b_{12}j_{6,\alpha} & b_{12}[\gamma_y + c_{68}(1 - c_{88}j_{\xi_t})] & b_{12}(1 + c_{67}(c_{77}^{t-1} - 1)/(c_{77} - 1)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}j_{5,\pi} + b_{22}j_{6,\pi} & b_{21}j_{5,\alpha} + b_{22}j_{6,\alpha} & b_{22}[\gamma_y + c_{68}(1 - c_{88}j_{\xi_t})] & b_{22}(1 + c_{67}(c_{77}^{t-1} - 1)/(c_{77} - 1)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}j_{5,\pi} + b_{32}j_{6,\pi} & b_{31}j_{5,\alpha} + b_{32}j_{6,\alpha} & b_{32}[\gamma_y + c_{68}(1 - c_{88}j_{\xi_t})] & b_{32}(1 + c_{67}(c_{77}^{t-1} - 1)/(c_{77} - 1)) & j_{\xi} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_{61}j_{5,\pi} + b_{62}j_{6,\pi} & b_{61}j_{5,\alpha} + b_{62}j_{6,\alpha} & b_{62}[\gamma_y + c_{68}(1 - c_{88}j_{\xi_t})] & b_{62}(1 + c_{67}(c_{77}^{t-1} - 1)/(c_{77} - 1)) & 0 & 0 & 0 & j_{\xi} \end{pmatrix}$$

Да отбележим, че K_t и Ω_t зависят от времето t , главно заради членовете си c_{77}^{t-1} .

Приложение 3

За калибрацията на (24), чрез многомерния метод на максимално правдоподобие, като първа стъпка, трябва да изразим вектора от случайните остатъци Ξ_t като функция на случайния вектор от наблюдаемите Z_t и случайния вектор на състоянието Y_{t-1} . За това прехвърляме отдясно вектора на остатъците Ξ_t умножен по ковариационната си матрица (омега) и едновременно прехвърляме отляво вектора от наблюдаемите Z_t . След това полученото матрично уравнение умножаваме и от двете страни по обратната на ковариационната матрица и така получаваме експлицитен израз за вектора от случайни остатъци:

$$(25) \quad \Xi_t = \Omega_t^{-1}(Z_t - K_t - \Gamma Y_{t-1})$$

Основна част от функцията на максимално правдоподобие се състои от плътността на функцията на случайните остатъци, при нас това е матричният израз в дясната страна на (25). За наше улеснение ние следваме допускането за нормалност на разпределението (което е общоприето в макро-финансовата литература без да се изследва). Това ни позволява да напишем в явен вид неговата многомерна (осем мерна в конкретния случай) плътност:

$$\oint(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp(-\varepsilon_1^2/2\sigma_1 - \dots - \varepsilon_8^2/2\sigma_8)$$

Сега за да напишем функцията на правдоподобие всичко това трябва да го умножим по модула на якобиана. Той се оказва, че е равен на детерминантата на обратната на омега:

$$(26) \quad d\Xi_t / dZ_t = \Omega^{-1}; J(\text{якобиан}) = \det(d\Xi_t / dZ_t) = \det \Omega^{-1} = 1 / \det \Omega$$

След това, съставяме произведението на така полученият израз по всички наблюдения. Това е нашата функция на правдоподобие.

Сега за да калибрираме модела си съставяме вектора от параметрите му Θ . Така задачата се свежда до намиране при каква стойност на този вектор, функцията ни на правдоподобие достига максимум. За да улесним търсенето на такъв максимум логаритмуваме функцията на правдоподобие. След като зададем границите в които се изменят компонентите на вектора от параметрите Θ , по някои от известните методи (на градиента, на Нютон, на покоординатното спускане и др.) намираме максимума на логаритъма на функцията на правдоподобие, т.е. максимума на функцията на правдоподобие.

Логаритъма на функцията на правдоподобие е:

$$L(\Theta) = \sum_{t=1}^N \log(\det \Omega)^{-1} \oint_t[\Omega^{-1}(Z_t - \Gamma Y_{t-1} - K)]$$

където $\oint_t$ е вероятностната плътност на ξ_t , която предполагаме нормална, а N е броят на наблюденията.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

```

function f = objectiveforTSIR221(theta, Z, X, mat, J)

% Z са Z(1)= Y(1)=на инфлация в (t), Z(2)= Y(3)=у v (t), + временните редове за
наблюдение = даваните точки от кривата – матрица от размерност, равна на (броя на
точките + 2) по броя на наблюденията.;
% X са временните редове на наблюдаваните X(1) = на инфлацията в (t), X(2)= инфлацията
в (t-1), X(3)=у v (t), X(4)= на у в (t-1), X(5)= на у в (t-2), X(6)= Level v (t), X(7) = Наклон в
(t-1); X е матрица от размерност, равна на броя на компонентите на X, т.е. 7 по броя на
наблюденията -2;

theta = theta(:);
%rho1 = theta(1);
%rho2 = theta(2);
%rho3 = theta(3);

ρ = [-5.5937673562847556e-001, 6.4197989922572163e-001; -9.9552685994811885e-001, -
6.1299833272100168e-001];

% ρ = [theta(1), 0; theta(2), theta(3)];
% ρ = [theta(1), 0; theta(2:3)];
% така дефинирахме параметрите ρ от yelds-only модела;

%σ1 = theta(4);
%σ2 = theta(5);

fsigma = [4.2808441477005424e-002, 0; 0, 1.0269032988517387e-004];
% така дефинирахме параметрите sigma от yelds-only модела (пред случайните остатъци);

%lambda01 = theta(6);
%lambda02 = theta(7);
%lambda11 = theta(8);
%lambda12 = theta(9);
%lambda21 = theta(10);
%lambda22 = theta(11);

lambda0 = [3.8684764485324058e-001; 7.8939025148246477e-003];
lambda1 = [1.5805711514345391e-001, -2.9682290182457518e-002; -9.6974750721762848e-
001, 7.0676173128529307e-001];
% така дефинираме параметъра ламбда (за цената на риска);
% -----;
% Сега ще дефинираме параметрите от Макро-Финансовия модел;

miupi = theta(1);

```

```

alfapi1= theta(2);
alfapi2= theta(3);
roL= theta(4);
alfay= theta(5);
gamapi= theta(6);
roU= theta(7);
gamay= theta(8);

```

```

miuY = theta(9);
betaY1 = theta(10);
betaY2 = theta(11);
betaR = theta(12);

```

```

kapapi1 = theta(13);
kapaL1 = theta(14);
kapapi5 = theta(15);
kapaL5 = theta(16);
kapapi6 = theta(17);
kapaL6 = theta(18);
%kapa1 = theta(30);
%kapa2 = theta(31);
%kapa3 = theta(32);
%kapa4 = theta(33);
kapaeta = theta(19);
xiks7 = 0.7;

```

```

save theta.txt theta -ascii -double % тук запазваме стойностите на параметрите

```

```

%delta11 = theta(31);
%delta12 = theta(32);
delta0 = -7.1253959297162450e-001;
delta1 = ones(2, 1);
A(1) = -delta0;
% тук дадохме начални стойности на параметрите в афинната функция за късата лихва от
yelds-only модела;
%delta1 = [-delta11, -delta12];
B(:,1) = -delta1;

```

```

for i = 2:J
    A(i) = A(i-1) + A(1) + B(:, i-1)*(-fsigma*lambda0) + (B(:, i-1)*fsigma*fsigma*B(:, i-1))/2;

    %disp('B(:, i-1)T*(-fsigma*lambda0)');
    %B(:, i-1)*(-fsigma*lambda0)
    %B(:, i-1)*fsigma*fsigma*B(:, i-1)/2

    B(:, i) = (B(:, i-1)*(rho - fsigma*lambda1))' + B(:, 1);

```

```

%disp('(B(:, i-1)T*(rho - fsigma*lambda1))T'); (B(:, i-1)*(rho - fsigma*lambda1))'

end
%disp(A); disp(B);
% така рекурсивно пресметнахме A и B, които ще ни трябват за определяне съгласно етап
3
% на доходността в произволна точка от кривата;

B = B(:, mat);
A = A(mat);
A = [0 0 A];
for i = 1:size(B, 2)
    B(:,i)=B(:,i)/mat(i);
    A(:,i+2)=A(:,i+2)/mat(i);
End
% Тук избрахме точките, които наблюдаваме

B = B'; % &%%%%%%%%%%
A = A';
%save A.txt A -ascii -double
%save B.txt B -ascii -double

% така избираме кои точно точки от кривата наблюдаваме и с тях ще работим;
% Като J и mat ще го зададем в началото на външната програма
%-----;
% Сега ще формираме функцията на правдоподобие – за тази цел: 1.Z са всичките
наблюдаеми;
% 2. Ще определим “гама”, 3. Ще определим “омега”; и 4. “em” ще го определим
gama(1,1)= (1-miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi);
gama(1,2)= (1-miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi);
gama(1,3)= alfay/(1-(1-roL)*miupi);
gama(1,4)= 0;
gama(1,5)= 0;
gama(1,6)= roL*miupi/(1-(1-roL)*miupi);
gama(1,7)= 0;
%gama(1,8)= 0;

gama(2,1)= 0;
gama(2,2)= 0;
gama(2,3)= 1/miuY;
gama(2,4)= (miuY-1)*betaY1/miuY;
gama(2,5)= (miuY-1)*betaY2/miuY;
gama(2,6)= 0;
gama(2,7)= betaR/miuY;
%gama(2,8)= 1;

```

```

gama(3,1)= B(1,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi) + B(1,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi);
% Взето е от уравнение 12 и от системата II
gama(3,2)= B(1,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi) + B(1,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi);
% Тук е като за гама(3,1), но вместо alfapi1 стои alfapi2;
gama(3,3)= B(1,1)*(1-roL)*alfay/(1-(1-roL)*miupi) + B(1,2)*gamapi*roL*alfay/(1-(1-
roL)*miupi) + B(1,2)*gamay/miuY;
gama(3,4)= B(1,2)*gamay*(miuY-1)*betaY1/miuY;
gama(3,5)= B(1,2)*gamay*(miuY-1)*betaY2/miuY;
gama(3,6)= B(1,1)*roL/(1-(1-roL)*miupi) + B(1,2)*gamapi*roL*(miupi-1)/(1-(1-roL)*miupi);
gama(3,7)= B(1,2)*gamay*betaR/miuY;
%gama(3,8)= B(1,2)*gamay;

```

```

gama(4,1)= B(2,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi) + B(2,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi);
gama(4,2)= B(2,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi) + B(2,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi);
gama(4,3)= B(2,1)*(1-roL)*alfay/(1-(1-roL)*miupi) + B(2,2)*gamapi*roL*alfay/(1-(1-
roL)*miupi) + B(2,2)*gamay/miuY;
gama(4,4)= B(2,2)*gamay*(miuY-1)*betaY1/miuY;
gama(4,5)= B(2,2)*gamay*(miuY-1)*betaY2/miuY;
gama(4,6)= B(2,1)*roL/(1-(1-roL)*miupi) + B(2,2)*gamapi*roL*(miupi-1)/(1-(1-roL)*miupi);
gama(4,7)= B(2,2)*gamay*betaR/miuY;
%gama(4,8)= B(2,2)*gamay;

```

```

gama(5,1)= B(3,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi) + B(3,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi);
gama(5,2)= B(3,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi) + B(3,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi);
gama(5,3)= B(3,1)*(1-roL)*alfay/(1-(1-roL)*miupi) + B(3,2)*gamapi*roL*alfay/(1-(1-
roL)*miupi) + B(3,2)*gamay/miuY;
gama(5,4)= B(3,2)*gamay*(miuY-1)*betaY1/miuY;
gama(5,5)= B(3,2)*gamay*(miuY-1)*betaY2/miuY;
gama(5,6)= B(3,1)*roL/(1-(1-roL)*miupi) + B(3,2)*gamapi*roL*(miupi-1)/(1-(1-roL)*miupi);
gama(5,7)= B(3,2)*gamay*betaR/miuY;
%gama(5,8)= B(3,2)*gamay;

```

```

gama(6,1)= B(4,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi) + B(4,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi);
gama(6,2)= B(4,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi) + B(4,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi);
gama(6,3)= B(4,1)*(1-roL)*alfay/(1-(1-roL)*miupi) + B(4,2)*gamapi*roL*alfay/(1-(1-
roL)*miupi) + B(4,2)*gamay/miuY;
gama(6,4)= B(4,2)*gamay*(miuY-1)*betaY1/miuY;
gama(6,5)= B(4,2)*gamay*(miuY-1)*betaY2/miuY;
gama(6,6)= B(4,1)*roL/(1-(1-roL)*miupi) + B(4,2)*gamapi*roL*(miupi-1)/(1-(1-roL)*miupi);

```

```

gama(6,7)= B(4,2)*gamay*betaR/miuY;
%gama(6,8)= B(4,2)*gamay;

gama(7,1)= B(5,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi) + B(5,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi);
gama(7,2)= B(5,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi) + B(5,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi);
gama(7,3)= B(5,1)*(1-roL)*alfay/(1-(1-roL)*miupi) + B(5,2)*gamapi*roL*alfay/(1-(1-
roL)*miupi) + B(5,2)*gamay/miuY;
gama(7,4)= B(5,2)*gamay*(miuY-1)*betaY1/miuY;
gama(7,5)= B(5,2)*gamay*(miuY-1)*betaY2/miuY;
gama(7,6)= B(5,1)*roL/(1-(1-roL)*miupi) + B(5,2)*gamapi*roL*(miupi-1)/(1-(1-roL)*miupi);
gama(7,7)= B(5,2)*gamay*betaR/miuY;
%gama(7,8)= B(5,2)*gamay;

gama(8,1)= B(6,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi) + B(6,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi1/(1-(1-roL)*miupi);
gama(8,2)= B(6,1)*(1-roL)*(1-miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi) + B(6,2)*gamapi*roL*(1-
miupi)*alfapi2/(1-(1-roL)*miupi);
gama(8,3)= B(6,1)*(1-roL)*alfay/(1-(1-roL)*miupi) + B(6,2)*gamapi*roL*alfay/(1-(1-
roL)*miupi) + B(6,2)*gamay/miuY;
gama(8,4)= B(6,2)*gamay*(miuY-1)*betaY1/miuY;
gama(8,5)= B(6,2)*gamay*(miuY-1)*betaY2/miuY;
gama(8,6)= B(6,1)*roL/(1-(1-roL)*miupi) + B(6,2)*gamapi*roL*(miupi-1)/(1-(1-roL)*miupi);
gama(8,7)= B(6,2)*gamay*betaR/miuY;
%gama(8,8)= B(6,2)*gamay;

gama = [gama(1,1), gama(1,2), gama(1,3), gama(1,4), gama(1,5), gama(1,6), gama(1,7);
gama(2,1), gama(2,2), gama(2,3), gama(2,4), gama(2,5), gama(2,6), gama(2,7);
gama(3,1), gama(3,2), gama(3,3), gama(3,4), gama(3,5), gama(3,6), gama(3,7);
gama(4,1), gama(4,2), gama(4,3), gama(4,4), gama(4,5), gama(4,6), gama(4,7);
gama(5,1), gama(5,2), gama(5,3), gama(5,4), gama(5,5), gama(5,6), gama(5,7);
gama(6,1), gama(6,2), gama(6,3), gama(6,4), gama(6,5), gama(6,6), gama(6,7);
gama(7,1), gama(7,2), gama(7,3), gama(7,4), gama(7,5), gama(7,6), gama(7,7);
gama(8,1), gama(8,2), gama(8,3), gama(8,4), gama(8,5), gama(8,6), gama(8,7)];
% Така определихме - 3.gama;
save gama.txt gama -ascii -double
%disp (gama);

% Сега ще определим omega за всяко наблюдение t:
for t = 1:size(Z,1)

omega(1,1)= kapapi1;
omega(1,2)= kapal1;
omega(1,3)= 0;
omega(1,4)= 0;
omega(1,5)= 0;

```



```

omega(1,6)= 0;
omega(1,7)= 0;
omega(1,8)= 0;

omega(2,1)= 0;
omega(2,2)= 0;
omega(2,3)= 1 + (1 - (1/miuY))*kapaeta; (1 - (1/miuY))*kapaeta;
omega(2,4)= 0;
omega(2,5)= 0;
omega(2,6)= 0;
omega(2,7)= 0;
omega(2,8)= 0;

omega(3,1)= B(1,1)*kapapi5 + B(1,2)*kapapi6;
omega(3,2)= B(1,1)*kapaL5 + B(1,2)*kapaL6;
omega(3,3)= B(1,2)*(gamay + gamay*(1 - kapaeta/miuY));%%%%%%%%%
gamay + gamay*(1 - kapaeta/miuY);
%1 - kapaeta/miuY;
j=roU;
j = j + roU^(t-1); %Така се вмстваме в допустимите за компютъра стойности на C77
omega(3,4)= B(1,2)*j;

omega(3,5)= 0;
omega(3,6)= 0;
omega(3,7)= 0;
omega(3,8)= 0;

omega(4,1)= B(2,1)*kapapi5 + B(2,2)*kapapi6;
omega(4,2)= B(2,1)*kapaL5 + B(2,2)*kapaL6;
omega(4,3)= B(2,2)*(gamay + gamay*(1 - kapaeta/miuY));%%%%%%%%%

% roU = roU*(roU^(t-2));
omega(4,4)= B(2,2)*j;

omega(4,5)= 0;
omega(4,6)= 0;
omega(4,7)= 0;
omega(4,8)= 0;

omega(5,1)= B(3,1)*kapapi5 + B(3,2)*kapapi6;
omega(5,2)= B(3,1)*kapaL5 + B(3,2)*kapaL6;
omega(5,3)= B(3,2)*(gamay + gamay*(1 - kapaeta/miuY));%%%%%%%%%
% roU = roU*(roU^(t-2));
omega(5,4)= B(3,2)*j;
omega(5,5)= -2.6032898481531050e-002;
omega(5,6)= 0;
omega(5,7)= 0;

```

```

omega(5,8)= 0;

omega(6,1)= B(4,1)*kapapi5 + B(4,2)*kapapi6;
omega(6,2)= B(4,1)*kapaL5 + B(4,2)*kapaL6;
omega(6,3)= B(4,2)*(gamay + gamay*(1 - kapaeta/miuY));%%%%%%%%

% roU = roU*(roU^(t-2));
omega(6,4)= B(4,2)*j;

omega(6,5)= 0;
omega(6,6)= -2.7035838942702853e-002;
omega(6,7)= 0;
omega(6,8)= 0;

omega(7,1)= B(5,1)*kapapi5 + B(5,2)*kapapi6;
omega(7,2)= B(5,1)*kapaL5 + B(5,2)*kapaL6;
omega(7,3)= B(5,2)*(gamay + gamay*(1 - kapaeta/miuY));%%%%%%%%
% roU = roU*(roU^(t-1));
omega(7,4)= B(5,2)*j;

omega(7,5)= 0;
omega(7,6)= 0;
omega(7,7)= -4.6958392388303837e-001;
omega(7,8)= 0;

omega(8,1)= B(6,1)*kapapi5 + B(6,2)*kapapi6;
omega(8,2)= B(6,1)*kapaL5 + B(6,2)*kapaL6;
omega(8,3)= B(6,2)*(gamay + gamay*(1 - kapaeta/miuY));%%%%%%%%
% roU = roU*(roU^(t-1));
omega(8,4)= B(6,2)*j;
if roU^(t) == 0 %Този цикъл извежда стойностите, които компютъра възприема като 0.
    disp(t)
    %disp(omega(8,4)); disp(omega(7,4)); disp(omega(6,4)); disp(omega(5,4)); disp(omega(4,4));
disp(omega(3,4));
end
omega(8,5)= 0;
omega(8,6)= 0;
omega(8,7)= 0;
omega(8,8)= 3.5629756974809652;

omega =[omega(1,1), omega(1,2), omega(1,3), omega(1,4), omega(1,5), omega(1,6), omega(1,7),
omega(1,8);
        omega(2,1), omega(2,2), omega(2,3), omega(2,4), omega(2,5), omega(2,6), omega(2,7),
omega(2,8);
        omega(3,1), omega(3,2), omega(3,3), omega(3,4), omega(3,5), omega(3,6), omega(3,7),
omega(3,8);

```

```

        omega(4,1), omega(4,2), omega(4,3), omega(4,4), omega(4,5), omega(4,6), omega(4,7),
        omega(4,8);
        omega(5,1), omega(5,2), omega(5,3), omega(5,4), omega(5,5), omega(5,6), omega(5,7),
        omega(5,8);
        omega(6,1), omega(6,2), omega(6,3), omega(6,4), omega(6,5), omega(6,6), omega(6,7),
        omega(6,8);
        omega(7,1), omega(7,2), omega(7,3), omega(7,4), omega(7,5), omega(7,6), omega(7,7),
        omega(7,8);
        omega(8,1), omega(8,2), omega(8,3), omega(8,4), omega(8,5), omega(8,6), omega(8,7),
        omega(8,8)];
C{t} = omega;
%disp (omega);
end
% Така определяме - 4.omega;

```

% Ще въведем вектора “em”, той зависи от всяко наблюдаемо t:

```

for t = 1:size(Z,1)
em(1)= 0;
em(2)= 0;
em(3)= A(3) + B(1,2)*roU^(t)*xiks7;
em(4)= A(2) + B(2,2)*roU^(t)*xiks7;
em(5)= A(5) + B(3,2)*roU^(t)*xiks7;
em(6)= A(6) + B(4,2)*roU^(t)*xiks7;
em(7)= A(7) + B(5,2)*roU^(t)*xiks7;
em(8)= A(8) + B(6,2)*roU^(t)*xiks7;
em = [em(1) em(2) em(3) em(4) em(5) em(6) em(7) em(8)];
%disp(em');
K{t} = em;
%save em'.txt em' -ascii -double
end

```

%save K{t}.txt K{t} -ascii -double

% сега със следващия цикъл ще изчислим случайния остатък Y чрез Z(t) и X(t-1)

% като формула (25)

```

for t = 2:size(Z,1)
    Y(:,t) = inv(C{t})*(Z(t,:) - K{t}' - gama*X(t-1,:));
end

```

Y=Y';

%for t = 191:194

%disp(Y(:,t));

%end

```

save Y.txt Y -ascii -double
%pdfY = ((2*pi)^(-7/2))*exp(-1/2*(Y(1,:)^2 + Y(2,:)^2 + Y(3,:)^2 + Y(4,:)^2 + Y(5,:)^2 +
Y(6,:)^2 + Y(7,:)^2 + Y(8,:)^2));

% Сега ще създадем логаритъма отфункцията на максималното правдоподобие:
for t = 1:size(Y,1)
    L = 0;
    L = L - 4*log(2*pi) - log(abs(det(C{t}))) - (1/2)*(Y(t,i)'*Y(t,i))
end

%det(omega)
f = -L
%взимаме отрицателна стойност, защото тя се поддава на процедура за минимизация, а
ние %търсим максимум на функцията

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

```
% Главно тяло
clear
% използвахме fmincon и въведохме ограничения за параметрите.
% Дефинираме променливите и ги въвеждаме

%load usa-Z`.txt;
%load Z-X.txt; % тук са главните компоненти (латентните фактори) след PCA;
%load Z-1.txt; % тук са инфлацията, инфлация(t-1), у и у(T-1);

%X = [Z_1 Z_X(:,1) Z_X(:,2) Z_X(:,3)];
%Z = usa_Z_;
Z = xlsread('Zus.xls');
X = xlsread('Xus.xls');

mat = [1 3 6 24 60 120]; % това са матуритетите на наблюдаваните точки;
J = 120;
%x0 = [0.23 0.12 0.5 0.534 0.5 0.3 0.7 0.3 0.2114 0.5 0.6 0.6 0.4 0.4 0.6 0.3 0.2 0.3 0.4 0.7] %
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7]; % тук даваме начални стойности на параметрите = ...;
%x0 = [0.1 0.3 0.2 0.4 0.56 0.6 0.3 0.7 0.3 0.7 0.3 0.87 0.2 0.8 0.2
0.8 0.3 0.8 0.2 0.8 0.4 0.8 0.43 0.9 0.2 0.89 0.7 0.2 0.5 0.2 0.6 0.8 0.4 0.1 0.1
0.1];
%x0 = rand(1, 19)
x0 = [ 8.4689999713655284e-001
2.3751530170744245e-001
6.0160004738587403e-001
4.8639999447358434e-001
8.8789999539887965e-001
7.6032257362185596e-001
9.3044591078049343e-001
9.6464360528049492e-002
4.9018816653777675e-001
4.4437055391295216e-001
6.1380000077913477e-001
7.9336282143511627e-001
7.6624230354833467e-001
1.9056467166358221e-001
3.7822125635978567e-002
9.4063730494410858e-003
7.7283059595577586e-001
6.7262621629880326e-001
9.6146493558320545e-001]'
```

```

lb = [0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.6999 0.0001 0.00019 0.0001 0.0001 0.0001
0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 -0.9999]; %-3.9999]; %-0.9999 -300 -300 -300
0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 -300 -300 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001];
ub = [0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9599 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999
0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999]; % 3.9999]; % 300 300 300 300 300
300 300 300 300 300 300 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999];

options = optimset('Display', 'Iter', 'MaxFunEvals', 1000, 'MaxIter', 50, 'TolFun', 1.0e-9, 'TolX',
1.0e-9);
[x, fval] fmincon(@objectiveforTSIR23, x0, [], [], [], [], lb, ub, [], options, Z, X, mat, J);
fval
[x0' x']

```